Gebrochen rationale Funktionen

Inhaltsverzeichnis

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Bei gebrochenrationalen Funktionen ist enthält der Nenner mindestens ein x.

Es ist nur ein echter Bruch wenn der Nenner größer als der Zähler ist, denn sonst lässt sich der Bruch durch eine Polynomdivison umformen. Hier ein Beispiel an normalen Brüchen.

Echt: $\frac{1}{8}$ oder $\frac{x^2-4x+1}{x^3-5}$

Unecht: $\frac{26}{26}$ oder $\frac{x^3+4x}{x^3+x}$ oder $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ oder $\frac{x^3-2x}{15x+3} = 0{,}0\overline{6}x^2 - 0{,}0\overline{13}\mathrm{x} - 0{,}130 + \frac{0{,}392}{15x+3}$

Definitionsbereich

Wie bei anderen Funktionen kann allen reellen Zahlen ein Y-Wert zugeordnet werden. Mit einer Ausnahme. Die Mathematik konnte noch nicht herausfinden was für ein Ergebnis es gibt, wenn man durch Null teil. Deswegen ist dort eine Definitionslücke (senkrechte Asymptote). Es gilt folgende Bedingung: $\text{Wenn } N(x) = 0$ ist, ist x die Ausnahme des Definitionsbereiches

Asymptoten

Den Asymptoten nähert der Graph sich an erreicht sie jedoch niemals

Senkrechte (vertikale) Asymptote

- $N(x) = 0$
- Ist außerdem der Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x|N(x) = 0\}$
- Wenn die Nullstelle an der gleichen Stelle wie die Definitionslücke ist, ist dort keine Nullstelle sondern eine hebbare Lücke.
- Ist es eine Doppelte Nullstelle, ist es eine Polstelle ohne VZW

Waagerechte Asymptote

1. Ist Zählergrad < Nennergrad dann gilt: $Z(x) = 0$
2. Ist Zählergrad = Nennergrad dann liegt die Asymptote bei $\frac{a}{c}$ wenn $\frac{ax^n+bx}{cx^n+dx}$
3. Ist Zählergrad > Nennergrad dann muss eine Polynomdivision durchgeführt werden. Dabei ist dann das Ergebnis (ohne Rest, weil er im Unendlichen gegen Null läuft) die Funktion der schiefen Asymptote.

Zählergrad meint im Zähler den höchsten Exponenten. Dasselbe gilt für Nennergrad.

Symmetrieverhalten

Symmetrie zum Ursprung, wenn $f(-x) = f(x)$

$$f(-x) = \frac{6(-x)^4}{(-x)^2+15} \rightarrow \frac{x}{x} = f(x)$$

Symmetrie zur Y-Achse, wenn $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+3} \rightarrow \frac{(-x)}{x} = -f(x)$$

Ableiten

Grundsätzlich gilt: $f(x) = \frac{Z(x)}{(N(x))^n} = Z(x) \times (N(x))^{-n}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{0,5}} = 2^{-0,5}$

Produktregel: $f = u \times v \rightarrow f' = u' \times v + u \times v'$

Die Produktregel muss angewendet werden wenn u und v mindestens ein x enthalten. Beispiel:

$$f(x) = x^{-1}(x^2 - 2)$$
$$u = x^{-1}, \qquad v = x^2 - 2$$
$$u' = x^{-2}, \qquad v' = 2x$$
$$f'(x) = -x^{-2}(x^2 - 2) + x^{-1}2x \rightarrow \frac{x^2 - 2}{x^2} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}$$

Kettenregel: $f = u[v(x)] \rightarrow f'(x) = u'[v(x)] \times v'(x)$

Sie wird bei Funktionen bei denen ein x ausgeklammert wurde angewendet. Beispiel:

$$f(x) = 1 \times (x^2 - 15)^{-2}$$
$$u = 1(x^2 - 15)^{-2}, \qquad v = x^2 - 15$$
$$u' = -2(x^2 - 15)^{-3}, \qquad v' = 2x$$
$$f'(x) = -2(x^2 - 15)^{-3} \times 2x \rightarrow -\frac{4x}{(x^2 - 15)^3}$$

Minimalkostenkombination

Die Isoquante (gebrochen rationale Funktion) $I_{Output}(x) = \frac{a}{x-b} + c$ zeigt die Kombination von X und Y, die $Output$ erzeugt, während die Isokostengerade $I_k(x) = mx + b = x \times p_x + y \times p_y$ die Kosten (K) sichtbar macht.

Mathematischer Ansatz

Wenn die Tangente I_K die Isoquante schneidet haben beide die gleiche Steigung. Bedeutet: $I_K(x) = I_{Output}(x)$ und $I_K'(x) = I_{Output}'(x)$

Eine Isoquante bestimmen

Die Isoquante hat 3 Buchstaben (außer x) und braucht somit 3 Punkte um bestimmt zu werden. $I_{Output}(x) = \frac{a}{x-b} + c$ wird umgeformt zu $I_{Output}(x) = a + yb + xc - bc = xy$ und die Punkte werden eingesetzt.

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 & -1 & 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$
$$a - bc = a + 1(0 \times 0) = 6,\ \ b = 0,\ \ c = 0$$

MKK

Beispiel der Rechnung:

1. x berechnen

$$I_{30}(x) = \frac{24}{x+3} - 2 \ \rightarrow I'_{30}(x) = \frac{-24}{(x-3)^2}$$
$$I'_K(x) = I'_{30}(x)$$
$$-\frac{12}{10} = \frac{-24}{(x-3)^2} \quad |\times (x-3)^2 \ | \,/ -1.2$$
$$(x-3)^2 = 20 \ \ | \pm \sqrt{\ }$$
$$x - 3 = \pm 2\sqrt{5} \ \ | -3$$
$$x_1 \sim 1{,}4721 \quad x_2 \sim -7{,}4721 \neq x \in [>0]$$

2. y berechnen

$$I_{30}(1{,}4721) = \frac{24}{1{,}4721 + 3} - 2 \sim 3{,}3666$$

3. MKK berechnen

$$x \times p_x + y \times p_y \sim 1{,}4721 \times 120 + 3{,}3666 \times 100 \sim 513{,}316\text{GE}$$

4. $I_K(x)$ berechnen

$$I_k(x) = \ mx + b \sim -1{,}2 \times 1{,}4721 + b = 3{,}3666 \,|+1{,}76652 \ \ b \sim 5{,}13312$$
$$I_{513{,}32}(x) = -1{,}2x + 5{,}13$$

Definitions- und Wertebereich

$$I_{Output}(x) = \frac{a}{x-b} + c$$

		Interpretation
Pol	$N(x) = 0 \rightarrow x = b$ $Z(b) \neq 0$	Bei $x = b$ liegt ein Pol mit VZW von – zu +.
Asymptote	$g(x) = c$	Unecht gebrochene Funktion, bei der der ganzrationale Teil c die Asymptote ist
Mathematisch	$D_{math} = \mathbb{R} \setminus \{b\}$ $W_{math} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$	Alle reellen Zahlen außer der Definitionslücke, die bei b liegt sind der Definitionsbereich. Dabei gehören alle reellen Zahlen außer c (der Asymptote) zum Wertebereich.
ökonomisch	$D_{ök} = (b; \infty)$ $W_{ök} = (c; \infty)$	Der Produktionsfaktor x muss größer als b sein und der Produktionsfaktor y muss größer als c sein, um den geplanten $Output$ zu erzielen.

Elastizität

<u>Absolute</u> Kostenänderung bei Mengenänderung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Von x_1 auf x_2 ist die durchschnittliche Kostenänderung m GE/ME.

<u>Relative</u> Kostenänderung bei Mengenänderung.

$\frac{y_2-y_1}{y_1}$ = relative Kostenänderung (in %)

$\frac{x_2-x_1}{x_1}$ = relative Mengenänderung (in %)

Kostenelastizität $= \frac{\text{relative Kostenänderung}}{\text{relative Mengenänderung}} = \frac{\Delta y \text{ in } \%}{\Delta x \text{ in } \%}$

Momentane Kostenänderung (= Grenzkosten)

$$K(x_1) = y_1; K'(x_1) = Steigung$$

Bei x_1 verursacht eine minimale Mengenänderung eine Kostenänderung um $Steigung$ GE/ME.

Punktelastizität von $K(x)$

$$e_{K,x}(x) = \frac{K'(x) \times x}{K(x)}$$

d.h. bei Änderung der Menge um 1% ändern sich die Kosten K um $e_{K,x}(x)$ (bei x ME). In der Formelsammlung auf Seite 126.

Merke: Die Ursache steht im Nenner, die Wirkung im Zähler

Preiselastizität der Nachfrage

Normal sieht die Funktion so aus: $e_{p,x}(x) = \frac{p'(x) \times x}{p(x)}$ und zeigt wie stark sich der Preis ändert, wenn die Nachfrage um 1% steigt oder sinkt. Da man aber nicht die Nachfrage (Menge) sondern nur den Preis kontrollieren kann (…), ist folgenden Funktion deutlich interessanter:

$$e_{x,p}(x) = \frac{p(x)}{p'(x) \times x}$$